# 10. előadás
## Speciális többágú fák
### B-fa

*Adatszerkezetek és algoritmusok* előadás
2018. április 17.

Kósa Márk, Pánovics János és Szathmáry László
Debreceni Egyetem
Informatikai Kar

# Többágú fák

A többágú fák kezelésére nincsenek általános elvek, implementációjuk elsősorban alkalmazásfüggő. A rendezett bináris fáknál bemutatott bejárási algoritmusok közül a preorder és a postorder bejárás azonban egyszerűen kiterjeszthető a rendezett többágú fák esetére is.

Reprezentációjuk az alábbi módokon történhet:

- A fát bináris fává alakítjuk.
- Az adatelemekben a rákövetkezők számára felső korlátot szabunk. Szétszórt reprezentáció esetén ilyenkor az adatrész mellett egy mutatótömb jelenik meg.
- Ha nincs felső korlátja a rákövetkezők számának, akkor a rákövetkezőket címző mutatókat felfűzhetjük egy egyirányban láncolt listába.



Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

# Lapok

A többágú fák speciális esete, ha lemezen jelennek meg. A mutatók ilyenkor lemezcímeket tartalmaznak. A fában egyszerre nem egy elemet mozgatunk a memória és a lemez között (hiszen az lassú lenne), hanem egy elemcsoportot. A fát felosztjuk lapokra, amelyeken a fa több eleme is lehet, és egyszerre egy lapot mozgatunk. A legjobb, ha a lap mérete megegyezik az operációs rendszer által használt blokkmérettel. A fa elemeit két lépésben tudjuk elérni: először a lapot érjük el, azon belül pedig az elemet.

A B-fa az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

- többágú fa
- keresőfa
- kiegyensúlyozott fa
- az elemek lapokon helyezkednek el

Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László



# B-fa

## A B-fa definíciója és tulajdonságai (1)

A B-fa olyan keresőfa, amely lapokból épül fel. A lapokon mutatók és adatelemek helyezkednek el. Egy-egy lapon az adatelemek maximális számát a B-fa rendje határozza meg. Ha a B-fa rendje *n*, akkor

- a gyökérlap kivételével minden lapon legalább *n* darab adatelemnek kell szerepelnie, és
- minden lapon legfeljebb 2*n* darab adatelem helyezkedhet el.

Egy-egy lapon az adatelemek kulcsaik szerint növekvőleg rendezettek.

$$\begin{array}{ccccccccc} \hline p_0 & a_1 & p_1 & a_2 & p_2 & \dots & p_{m-1} & a_m & p_m \\ \hline & k_1 & < & k_2 & < & & < & k_m & \end{array}$$

Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László



# B-fa

## A B-fa definíciója és tulajdonságai (2)

Tegyük fel, hogy a B-fa egy lapján az adatelemek aktuális száma éppen $m$ ($\leq 2n$). Ekkor a B-fa egy lapja vagy levéllap, vagy pontosan $m+1$ darab rákövetkezője van. A levéllapon mindegyik mutató értéke NIL.

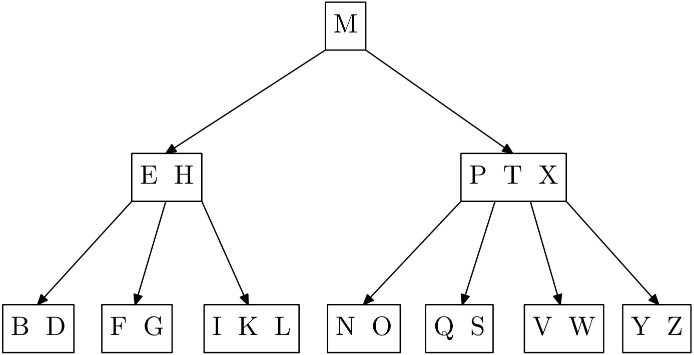
Egy nem levéllap

- $p_0$ mutatója azt a részfát címzi (arra a részfára mutat), amelyben minden kulcsérték kisebb ezen lap $k_1$ értékű kulcsánál.
- $p_i$ mutatója ($0 < i < m$) azt a részfát címzi, amelyben minden kulcsérték nagyobb ezen lap $k_{i-1}$ értékű kulcsánál és kisebb a $k_i$ értékű kulcsánál.
- $p_m$ mutatója azt a részfát címzi, amelyben minden kulcsérték nagyobb ezen lap $k_m$ értékű kulcsánál.

A B-fában a levéllapok azonos szinten helyezkednek el.

# Példa B-fára

Egy másodrendű B-fa karakter típusú kulcsokkal:







Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

# Keresés B-fában

## Keresés B-fában

A B-fában a $K$ kulcsot keressük.

1. Ha a B-fa üres, az algoritmus véget ér, a keresett elem nincs a B-fában.
2. A B-fa gyökérlapján lineáris keresést hajtunk végre. Ha a lineáris keresés sikeres, megtaláltuk a keresett elemet, az algoritmus véget ér.
3. Ha a lineáris keresés sikertelen, akkor
   - vagy a gyökérlap első olyan eleménél ($a_i$), melynek kulcsa ($k_i$) nagyobb, mint $K$,
   - vagy a gyökérlap utolsó eleme után

   áll meg a lineáris keresés. Előbbi esetben a $p_{i-1}$ mutató által mutatott részfában, utóbbi esetben a $p_m$ mutató által mutatott részfában folytatjuk a keresést (rekurzívan).



Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

# B-fa bővítése

## B-fa bővítése

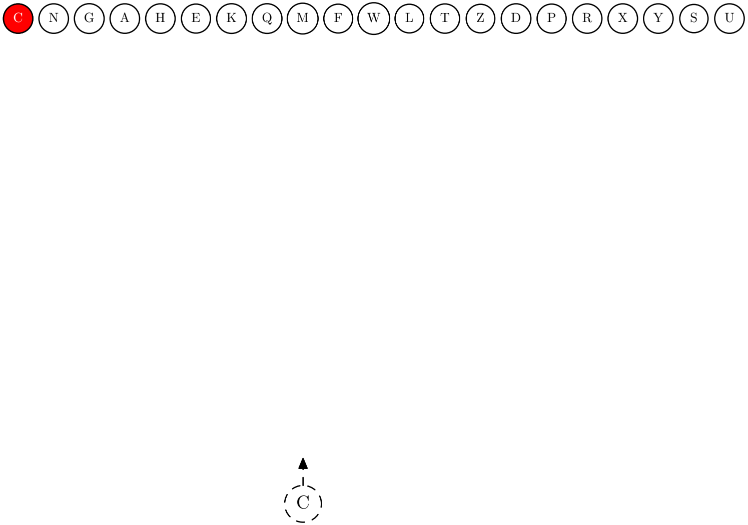
A B-fát mindig levéllapon bővítjük, ha a bővítendő elem még nem szerepel a B-fában.

1. Megkeressük azt a levéllapot, ahová a bővítendő adatelemet el fogjuk helyezni.
2. Ha a levéllapon $2n$-nél kevesebb elem szerepel, akkor a rendezettség figyelembevételével elhelyezzük a bővítendő elemet a lapon.
3. Ha a levéllapon a bővítést megelőzően már $2n$ elem szerepelne (tele van), akkor a – bővített elemmel együtt – $2n + 1$ elem közül kiválasztjuk a rendezettség szerinti középsőt, amit kiemelünk ezen elemek közül, s beszúrunk a szülőlapra. A megmaradt elemeket két lapra osztjuk szét: az első $n$ darab a kiemelt középső elem bal oldali mutatója által mutatott lapra, az utolsó $n$ darab elem pedig a kiemelt középső elem jobb oldali mutatója által mutatott lapra kerül.



Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

# Példa B-fa bővítésére






Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

# Példa B-fa bővítésére

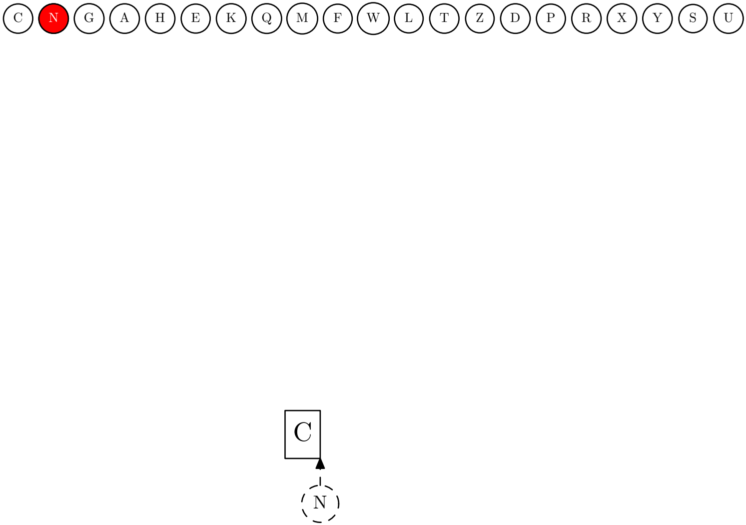
C N G A H E K Q M F W L T Z D P R X Y S U

C



Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

# Példa B-fa bővítésére






Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

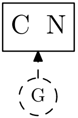
# Példa B-fa bővítésére

C **N** G A H E K Q M F W L T Z D P R X Y S U

| C N |
|---|

# Példa B-fa bővítésére

C N G A H E K Q M F W L T Z D P R X Y S U



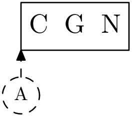
# Példa B-fa bővítésére

C N G A H E K Q M F W L T Z D P R X Y S U

C G N

# Példa B-fa bővítésére

C N G A H E K Q M F W L T Z D P R X Y S U



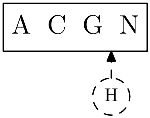
# Példa B-fa bővítésére

C N G A H E K Q M F W L T Z D P R X Y S U

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | C | G | N |

# Példa B-fa bővítésére

C N G A H E K Q M F W L T Z D P R X Y S U

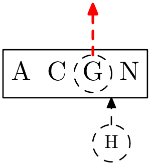





Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

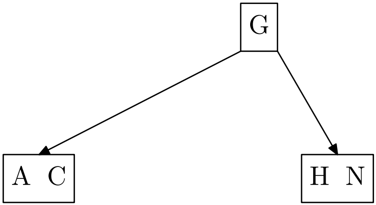
# Példa B-fa bővítésére

C N G A H E K Q M F W L T Z D P R X Y S U

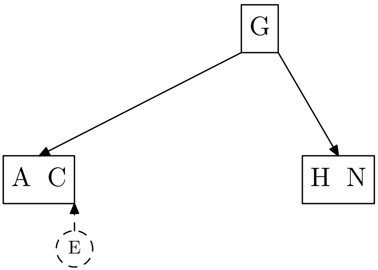


# Példa B-fa bővítésére

C N G A **H** E K Q M F W L T Z D P R X Y S U

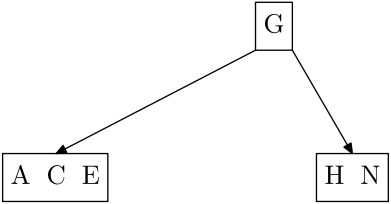


# Példa B-fa bővítésére

# Példa B-fa bővítésére

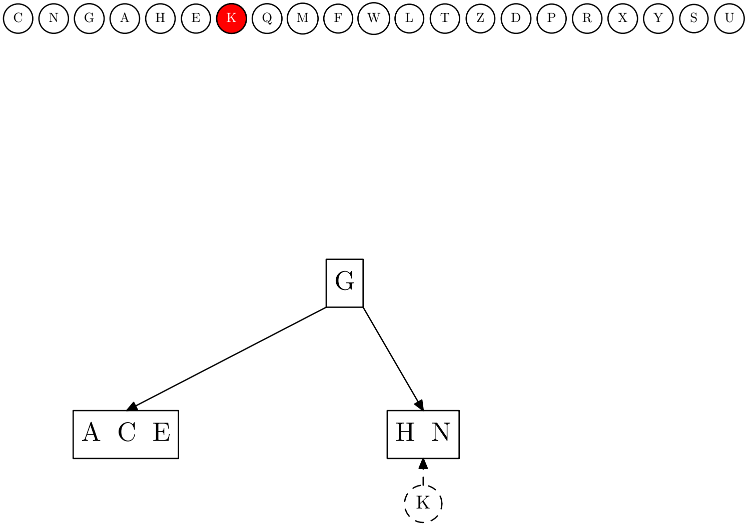
C N G A H E K Q M F W L T Z D P R X Y S U





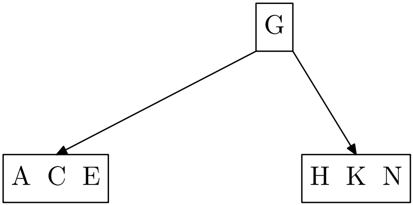

Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

# Példa B-fa bővítésére



# Példa B-fa bővítésére

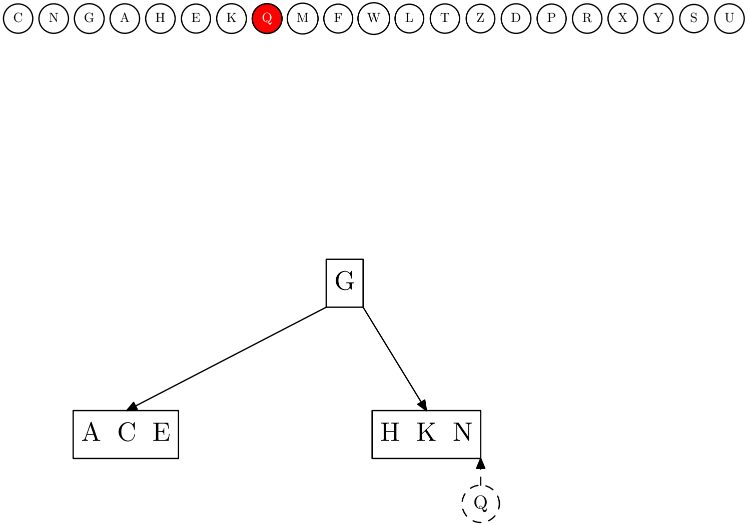
C N G A H E K Q M F W L T Z D P R X Y S U





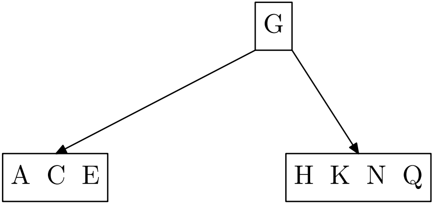

Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

# Példa B-fa bővítésére



# Példa B-fa bővítésére

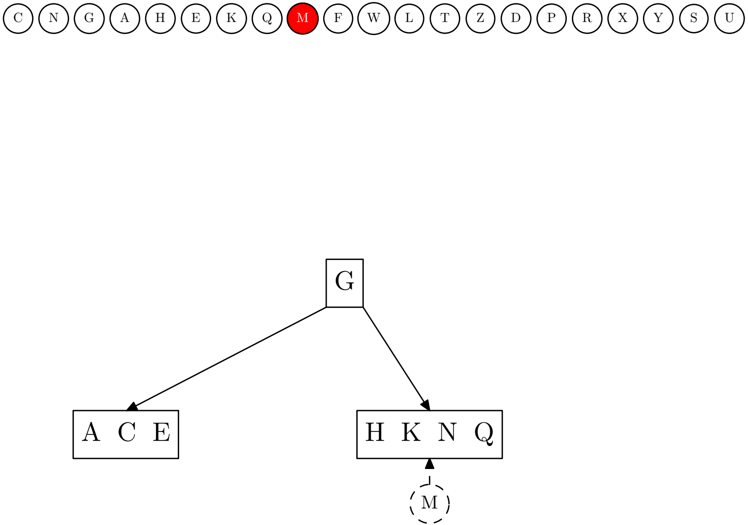
C N G A H E K Q M F W L T Z D P R X Y S U






Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

# Példa B-fa bővítésére

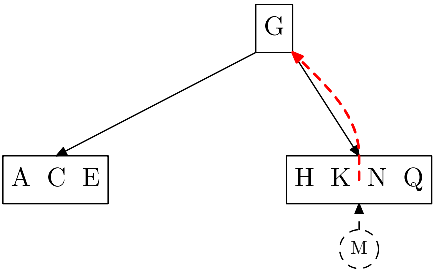





Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

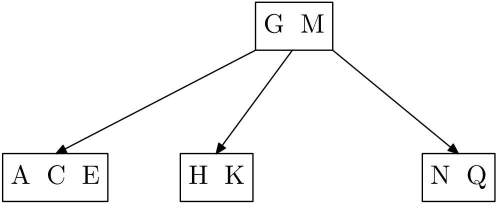
# Példa B-fa bővítésére

C N G A H E K Q M F W L T Z D P R X Y S U



# Példa B-fa bővítésére

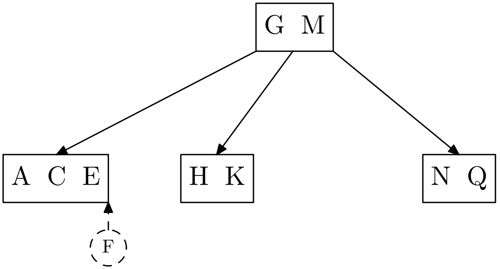
C N G A H E K Q M F W L T Z D P R X Y S U






Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

# Példa B-fa bővítésére

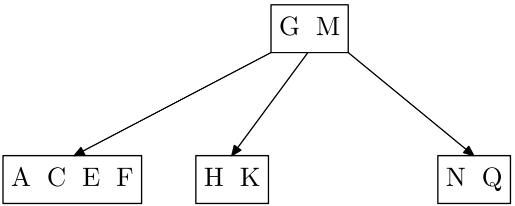





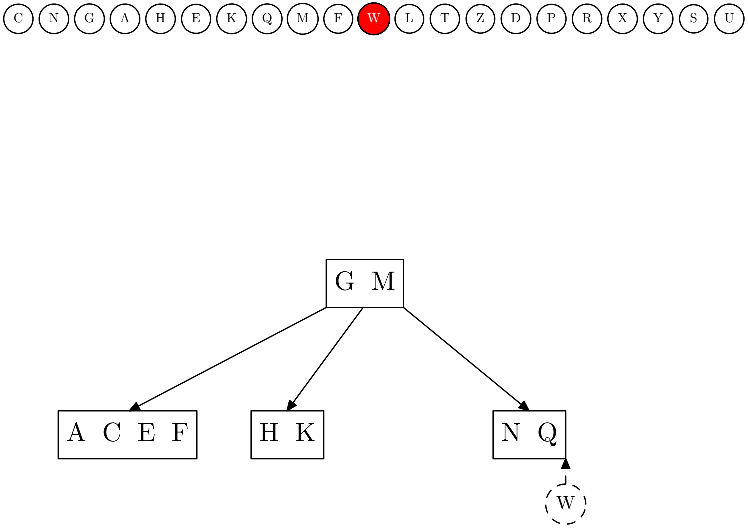

Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

# Példa B-fa bővítésére

C N G A H E K Q M F W L T Z D P R X Y S U



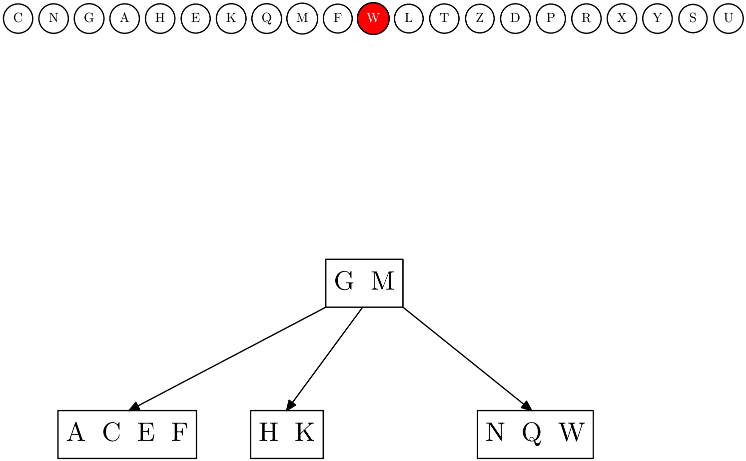
# Példa B-fa bővítésére






Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

# Példa B-fa bővítésére

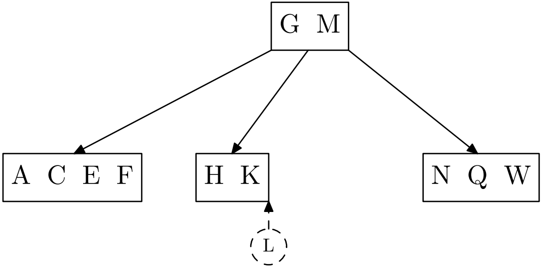





Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

# Példa B-fa bővítésére

C N G A H E K Q M F W L T Z D P R X Y S U

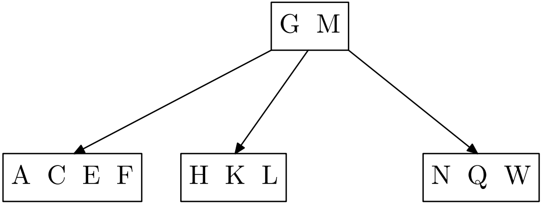




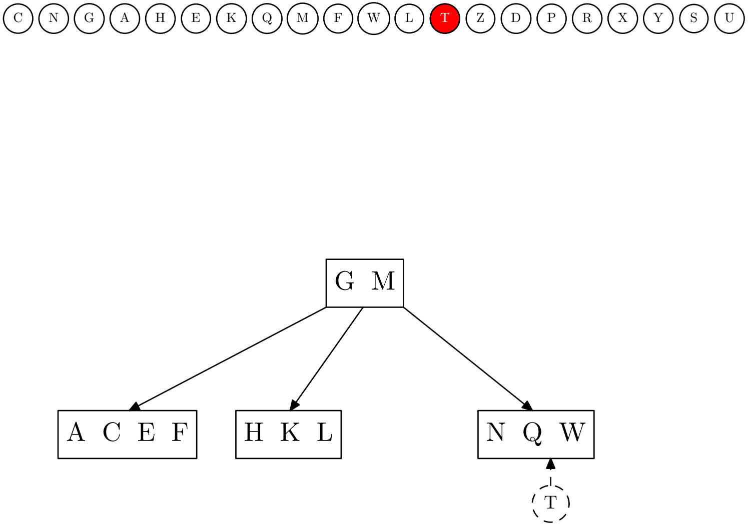

Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

# Példa B-fa bővítésére

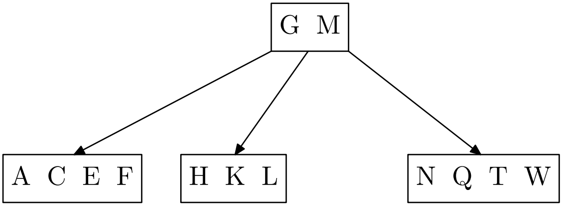



# Példa B-fa bővítésére



# Példa B-fa bővítésére

C N G A H E K Q M F W L **T** Z D P R X Y S U

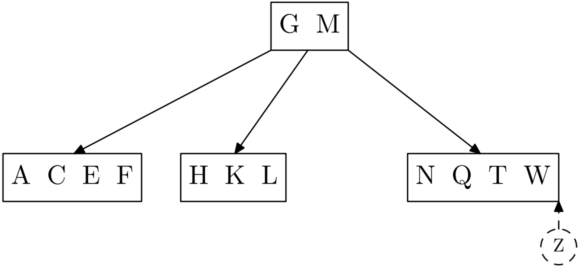





Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

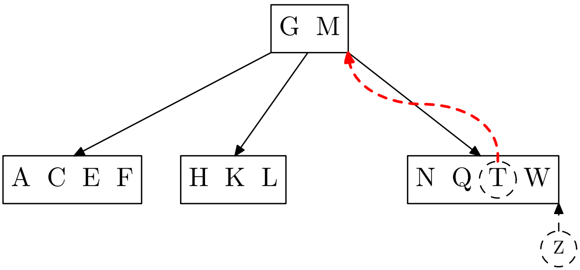
# Példa B-fa bővítésére

C N G A H E K Q M F W L T Z D P R X Y S U



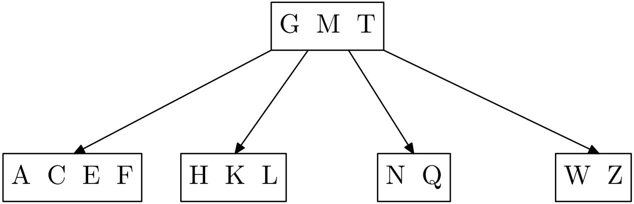
# Példa B-fa bővítésére

C N G A H E K Q M F W L T Z D P R X Y S U



# Példa B-fa bővítésére

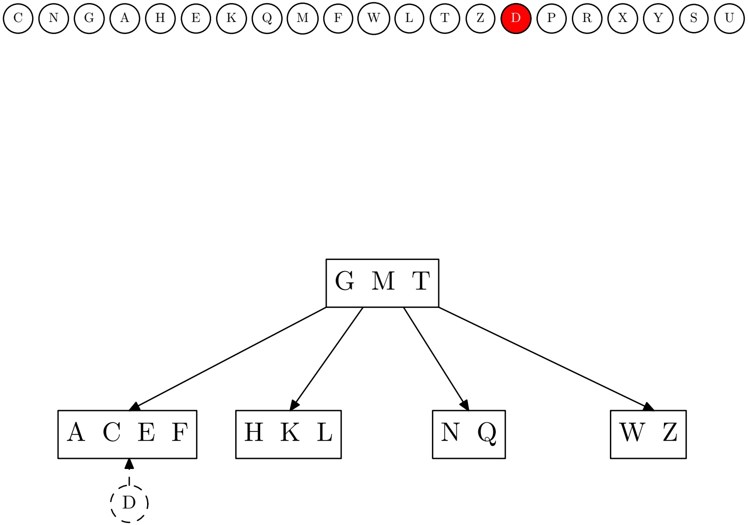
C N G A H E K Q M F W L T Z D P R X Y S U






Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

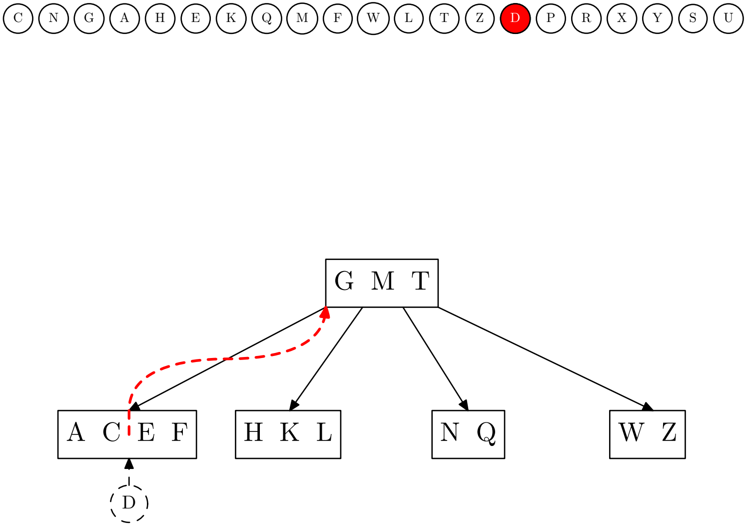
# Példa B-fa bővítésére



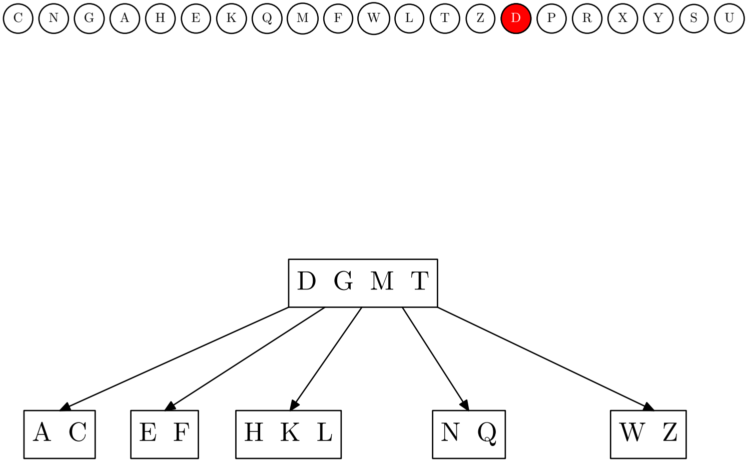



Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

# Példa B-fa bővítésére



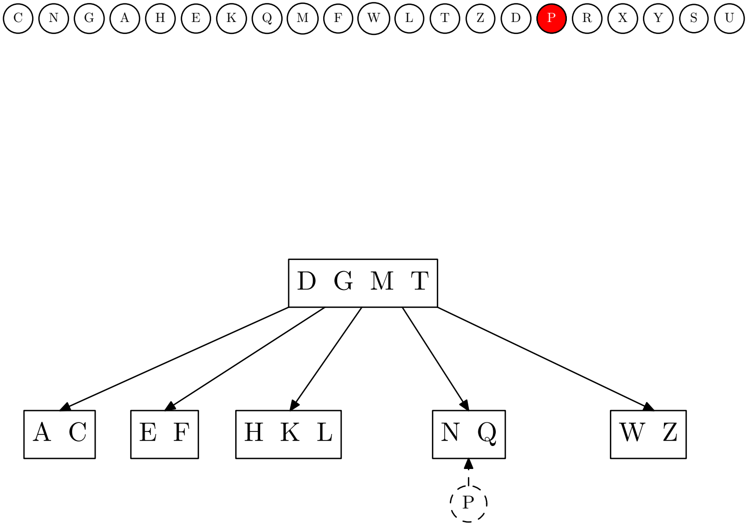
# Példa B-fa bővítésére





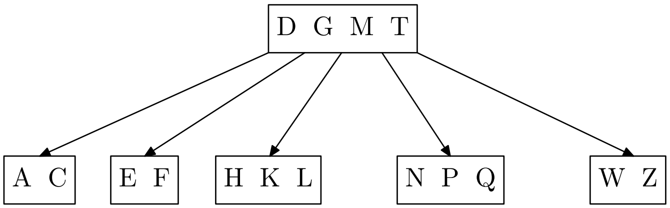

Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

# Példa B-fa bővítésére



# Példa B-fa bővítésére

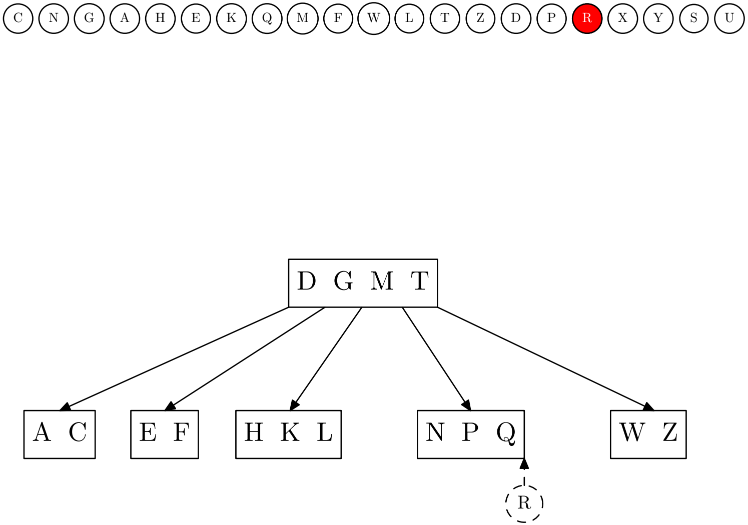
C N G A H E K Q M F W L T Z D P R X Y S U





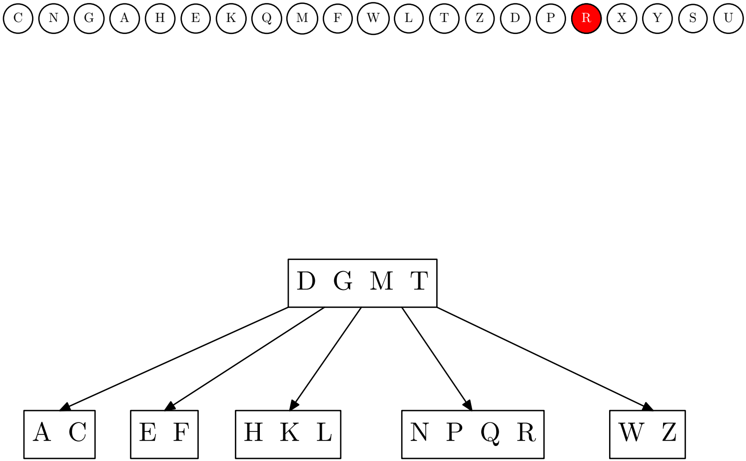

Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

# Példa B-fa bővítésére



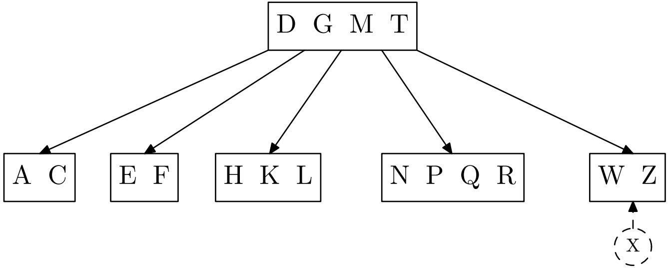
Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

# Példa B-fa bővítésére

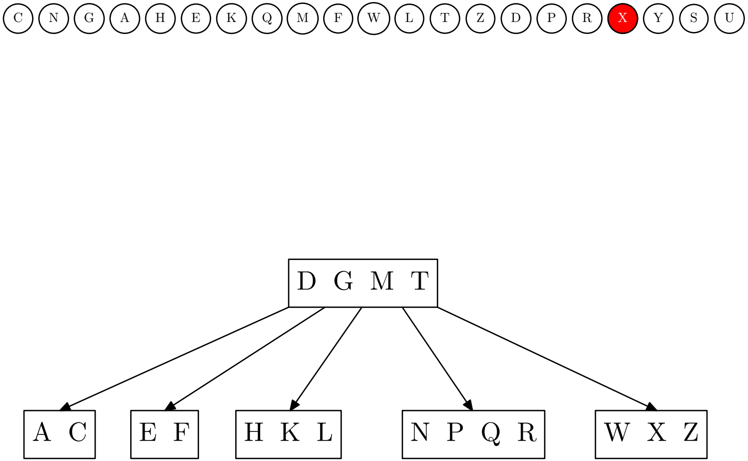


# Példa B-fa bővítésére

C N G A H E K Q M F W L T Z D P R X Y S U



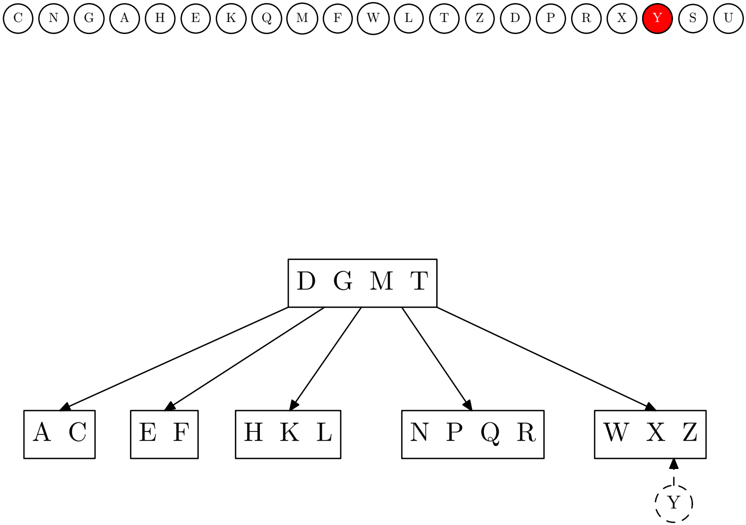
# Példa B-fa bővítésére






Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

# Példa B-fa bővítésére

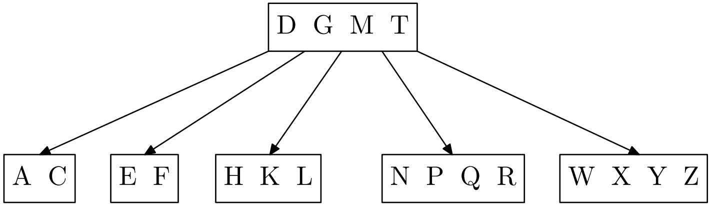




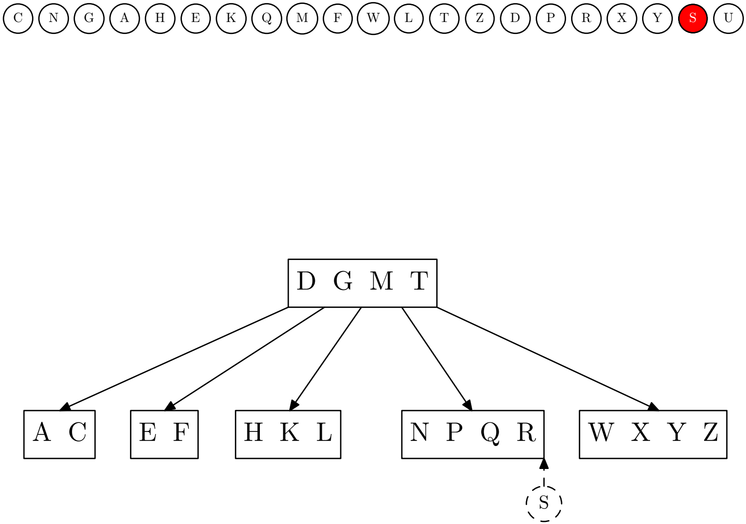

Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

# Példa B-fa bővítésére

C N G A H E K Q M F W L T Z D P R X Y S U



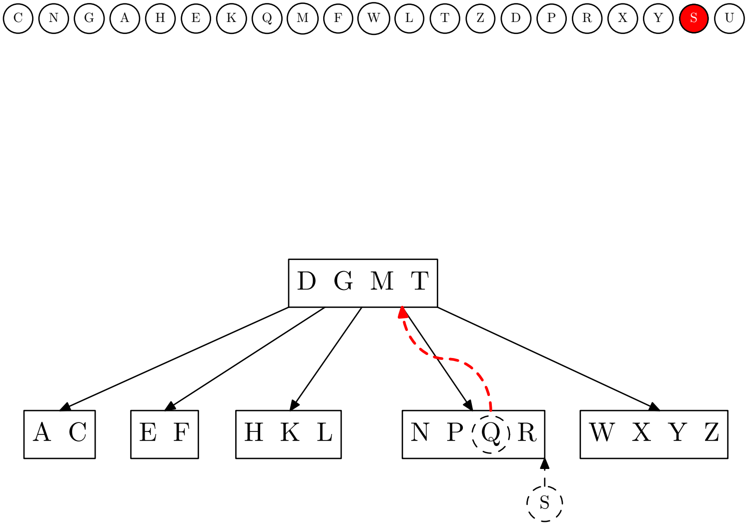
# Példa B-fa bővítésére



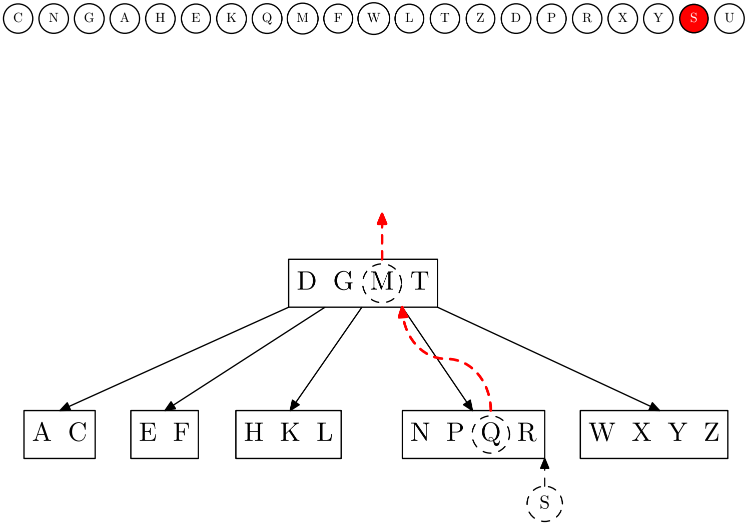



Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

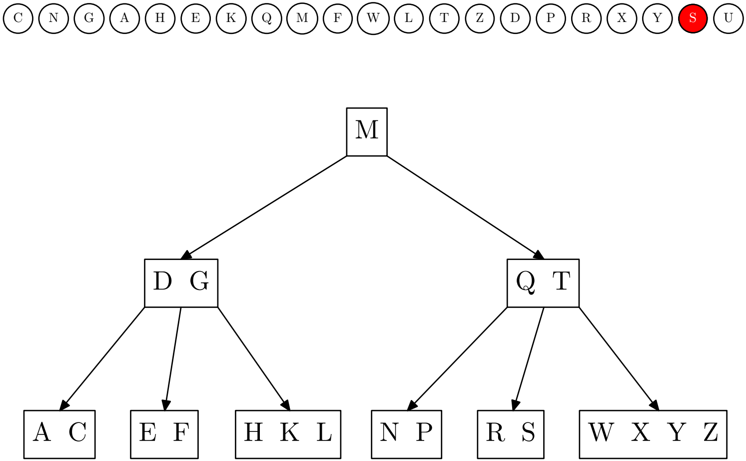
# Példa B-fa bővítésére



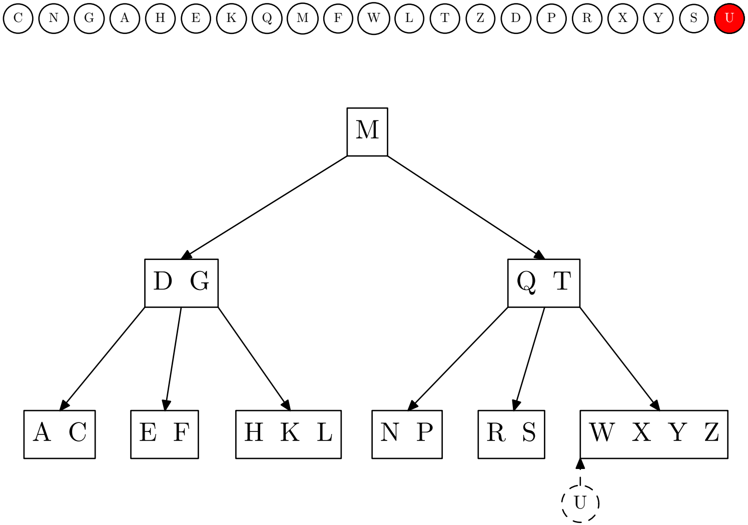
# Példa B-fa bővítésére



# Példa B-fa bővítésére



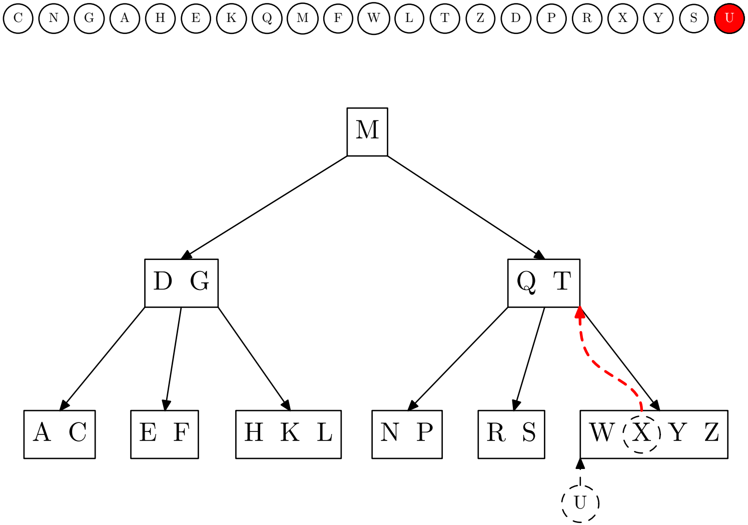
# Példa B-fa bővítésére






Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

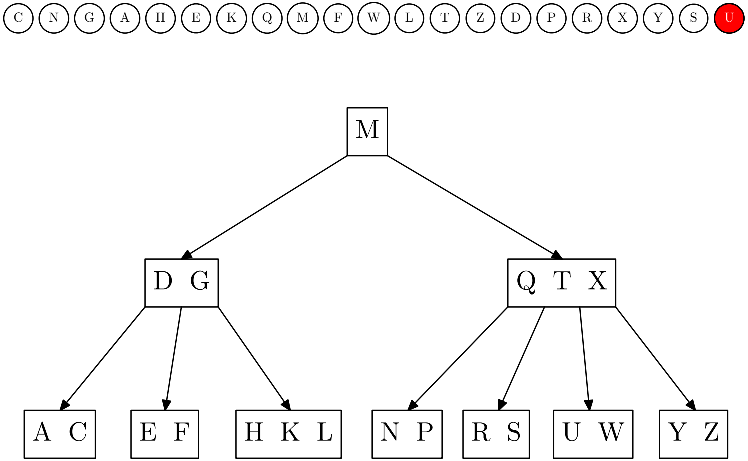
# Példa B-fa bővítésére






Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

# Példa B-fa bővítésére






Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

# Törlés B-fából

Ha a törlendő elem nem levéllapon van, akkor felülírjuk azzal a levéllapon lévő elemmel, amelyik a törlendő elem inorder módon megelőzője (vagy rákövetkezője). Fizikailag tehát minden esetben levéllapról törlünk.

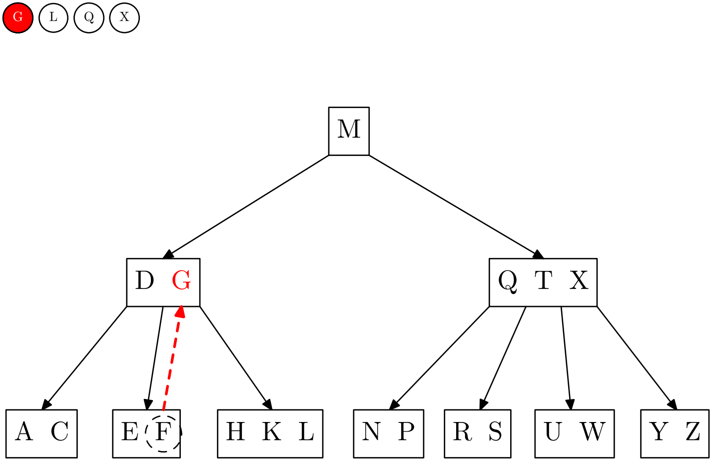
A törlés után előfordulhat, hogy a levéllapon $n - 1$ elem marad. Ekkor két eset lehetséges:

1. Ha valamelyik szomszédos testvérlap legalább $n + 1$ elemet tartalmaz, akkor a közös szülőlapjukon keresztül átveszünk tőle egy elemet. Ez azt jelenti, hogy a testvérlap legszélső eleme a szülőlapra kerül a megfelelő helyre, az eredetileg ott lévő elem pedig lekerül az $n - 1$ elemet tartalmazó gyermeklapra. Ezzel egyidejűleg a testvérlapon lévő legszélső mutató (és így az onnan kiinduló részfa) is átkerül a „csonka” lapra. Ez a művelet tehát hasonló az AVL-fa forgatás műveletéhez.
2. Ha mindkét szomszédos testvérlap $n$ elemet tartalmaz (vagy csak egy szomszédos testvérlap van, és az $n$ elemet tartalmaz), akkor valamelyikükkel lapösszevonást kell végrehajtani. Ez azt jelenti, hogy ebből a két lapból, valamint a szülőlapon a két lap közötti elemből egy $2n$ elemet tartalmazó lapot képzünk. Ezáltal a szülőlapon eggyel csökken az elemek száma, így előfordulhat, hogy ott is $n - 1$ elem marad. A fenti lépéseket tehát iterálni kell. Legrosszabb esetben a lapösszevonás egészen a gyökérlapig felgyűrűzhet, ilyenkor eggyel csökken a fa magassága.

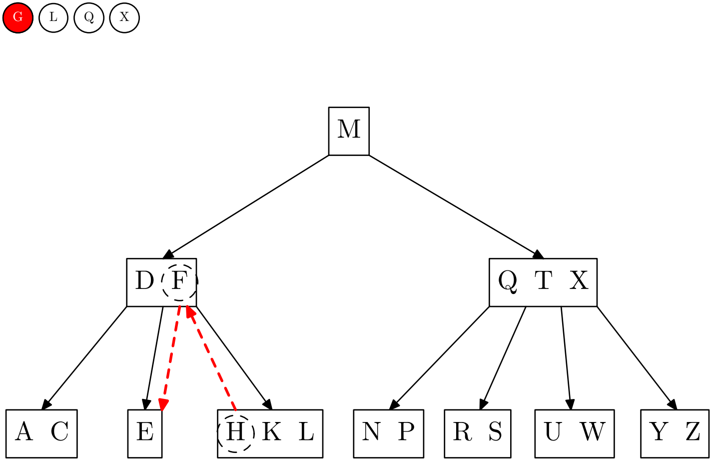


Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

# Példa B-fából való törlésre



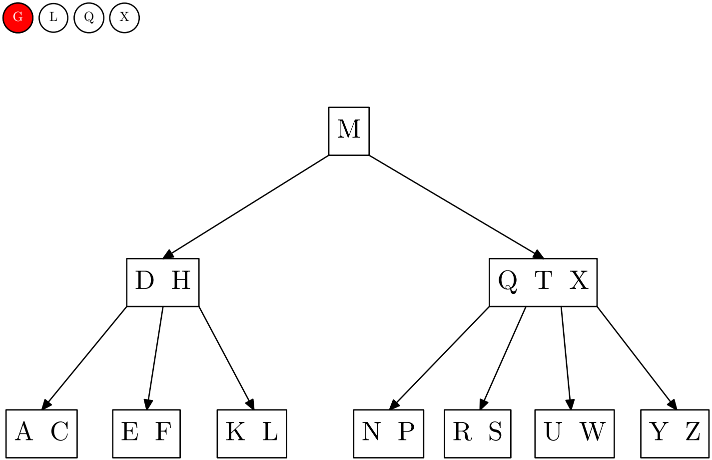
# Példa B-fából való törlésre



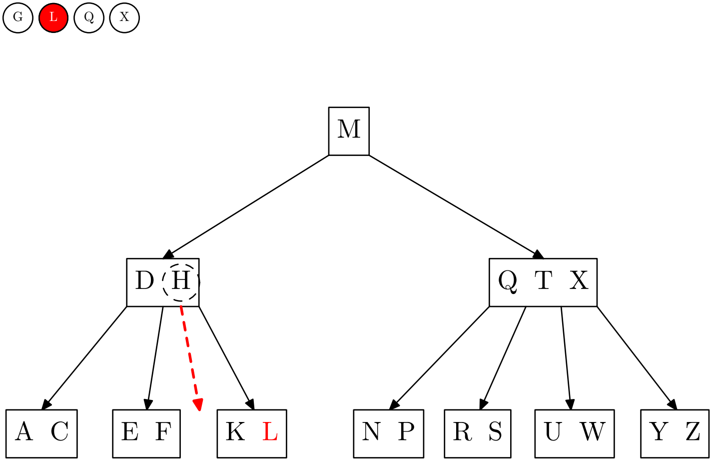



Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

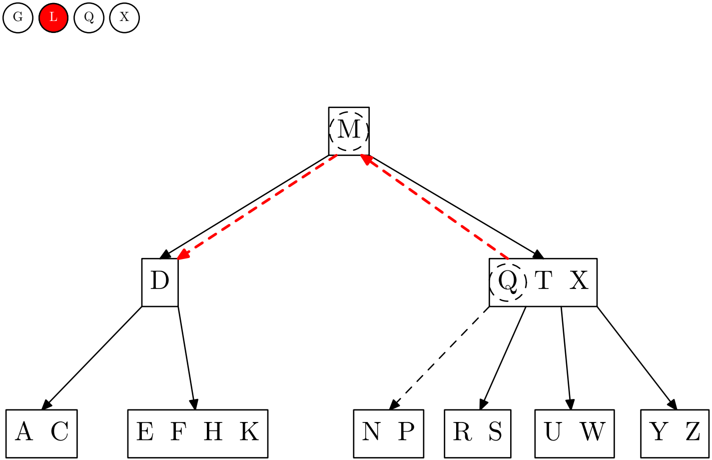
# Példa B-fából való törlésre



# Példa B-fából való törlésre



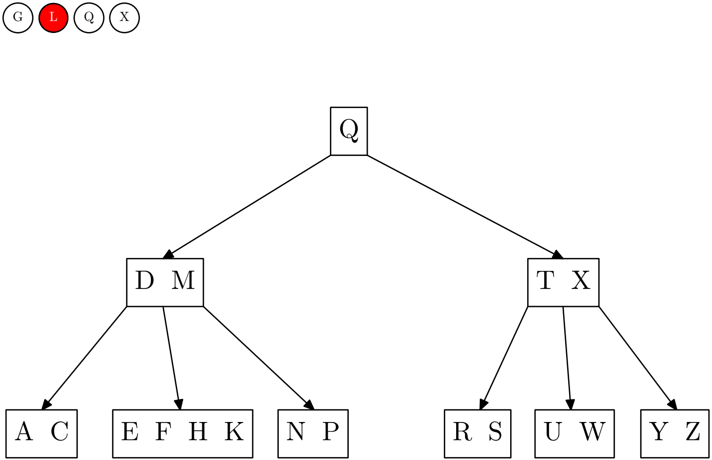
# Példa B-fából való törlésre






Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

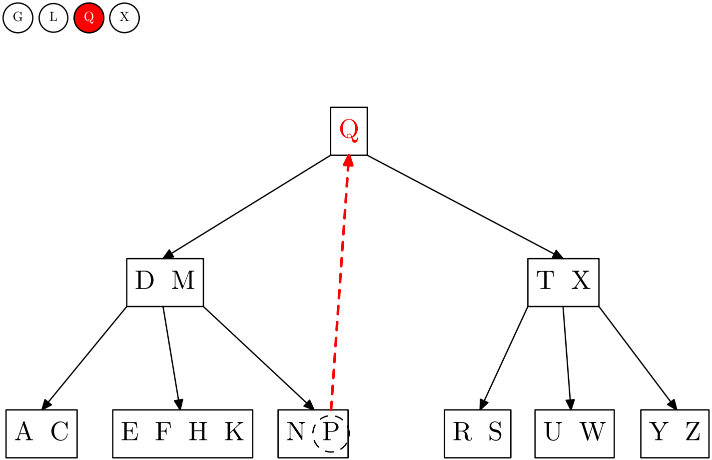
# Példa B-fából való törlésre






Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

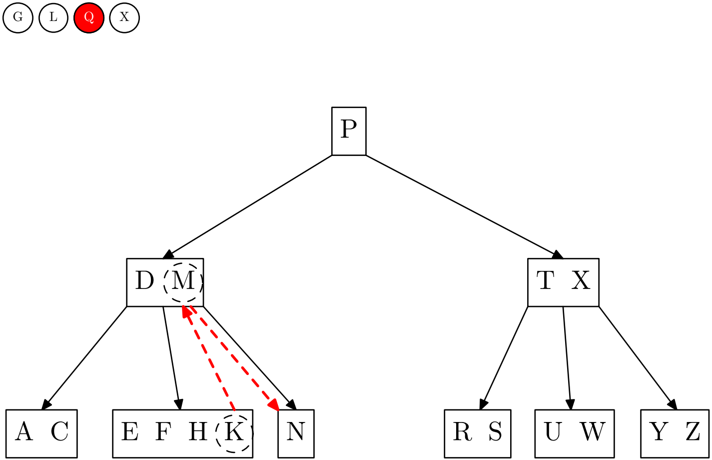
# Példa B-fából való törlésre






Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

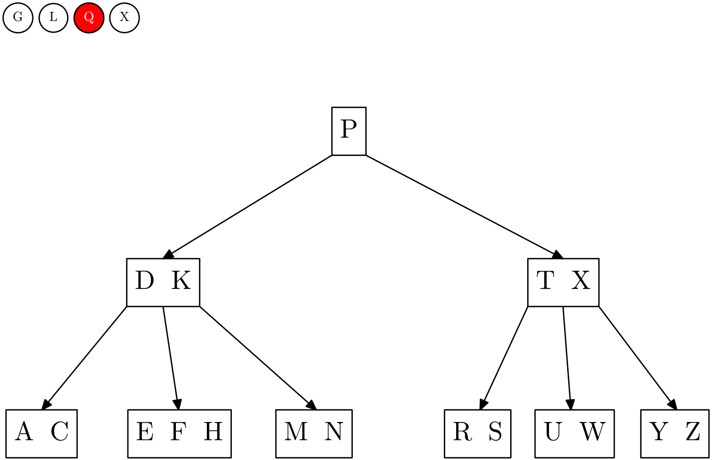
# Példa B-fából való törlésre






Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

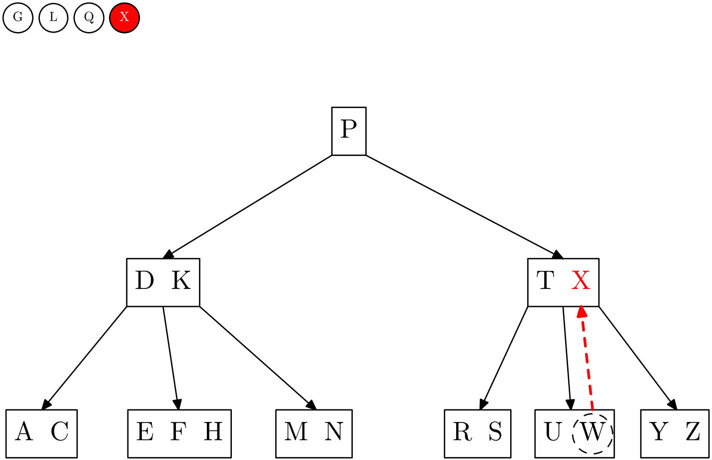
# Példa B-fából való törlésre



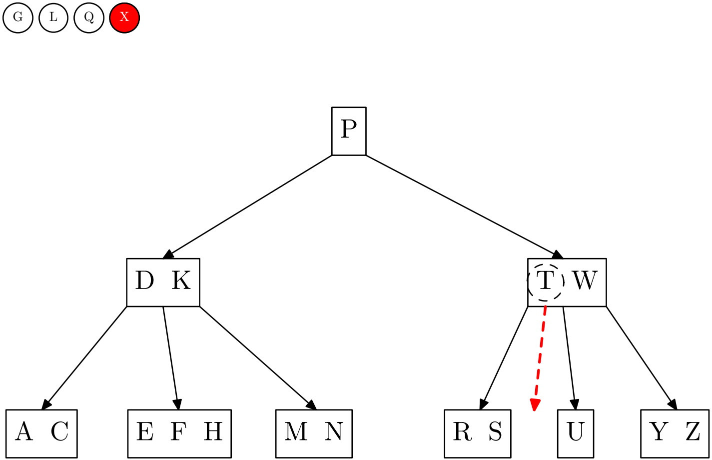



Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

# Példa B-fából való törlésre



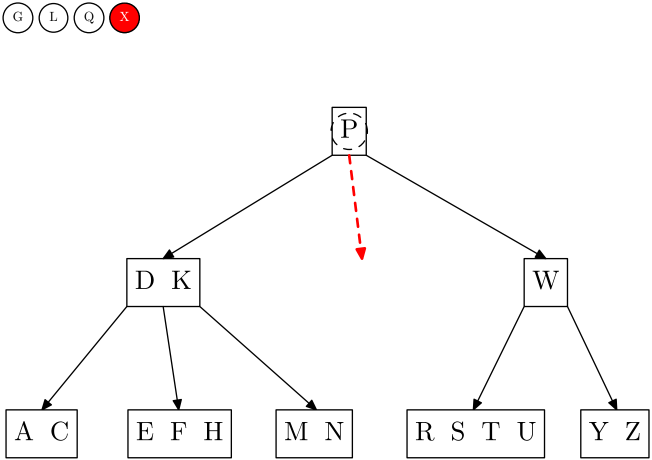
# Példa B-fából való törlésre






Kósa Márk
Pánovics János
Szathmáry László

# Példa B-fából való törlésre



# Példa B-fából való törlésre